Kombinácie

Pri variáciách a permutáciách sme vytvárali usporiadané k-tice – záležalo na poradí prvkov. Ak namiesto usporiadaných k-tíc vytvárame iba podmnožiny, dostaneme kombinácie. V prvom ročníku pri množinách sme sa učili rovnosť množín (rovnajú sa, ak obsahujú tie isté prvky ⇒ pri vymenovaní prvkov množiny nezáleží na poradí) – nedostanem novú množinu, ak vymenujem tie isté prvky len v inakšom poradí.

D. ***Kombinácie k-tej triedy z n prvkov*** (***bez opakovania***) sú všetky k prvkové podmnožiny vytvorené z n prvkovej množiny.

P. Aj tu musí byť počet prvkov podmnožiny menší ako počet prvkov základnej množiny alebo sa rovnať.

$k \leq n$

Ako potom vypočítať počet kombinácií?

V úvodných príkladoch, v druhom príklade (keď tri rovnaké knihy sme vylosovali v triede), sme vychádzali z počtu variácií bez opakovania (výsledok v prvom príklade). Tú hodnotu sme delili s počtom, koľkými spôsobmi sme vedeli napísať tri mená v rôznych poradiach – šiestimi. Ak to chceme zovšeobecniť, musíme nejakým spôsobom vypočítať správny deliteľ.

Tam sme najprv vytvárali usporiadané trojice (variácie tretej triedy) a potom iba trojprvkové podmnožiny (kombinácie tretej triedy). Keby sme mali štyri knihy, potom by sme mali deliť počet variácií štvrtej triedy s počtom, koľkými spôsobmi môžeme usporiadať štyri prvky (permutácie 4) – P(4) = 4! = 24.

Takže – počet kombinácií dostaneme, ak počet variácií delíme permutáciami triedy:

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)}{P(k)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}$$

Po odstránení zloženého zlomku dostaneme konečný tvar.

V. Počet kombinácií bez opakovania môžeme vypočítať vzorcom:

$$C_k(n) = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

P. Na kalkulačkách kombinácie bez opakovania môžete nájsť (avšak nie na každej vedeckej) ako funkciu *n*C*r*.

P. Existujú aj kombinácie s opakovaním. Chápať to, ako vytváranie podmnožín, kde prvky sa môžu opakovať, sa nedá – z teórie množín vieme, že množine nepribudne prvok, ak nejaký z prvkov viackrát vymenujem pri určení tejto množiny.

Zmeňme prvý úvodný príklad tak, že tie tri knihy budú rovnaké (ako v druhom príklade), ale môže triedny odmeniť žiaka s knihou aj viackrát (žiak môže dostať aj viac kníh – dve alebo všetky tri).

Poďme na to postupne:

napíše mená na ceduľky a vloží ich do urny
vylosuje prvého a vráti ceduľku späť do urny
vylosuje druhého a znovu vráti ceduľku
po vylosovaní posledného už končí a nevráti do urny nič

To je také, ako keby mal v urne pôvodne dve ceduľky navyše (samozrejme nemôže vedieť ktorými menami – závisí od výsledku prvého a druhého losovania), lebo dvakrát vrátil ceduľky.

Ak podobne uvažujeme aj pri iných počtoch (k) – napríklad 10 kníh rozdá medzi žiakmi: potom deväťkrát vráti ceduľku – je to tá istá situácia, ako keby mal o (k – 1), čiže o 9 viac ceduliek.

Preto počet kombinácií s opakovaní sa počíta ako počet kombinácií bez opakovania ale z navýšeného počtu prvkov základnej množiny o triedu mínus jedna (o k – 1)

$$C'_k(n) = C_k(n + k - 1) = \frac{(n+k-1)!}{k!.(n-1)!}$$

príklad:

Utvorte všetky kombinácie tretej triedy zo šiestich prvkov a, b, c, d, e, f.

{a; b; c}, {a; b; d}, {a; b; e}, {a; b; f},
{a; c; d}, {a; c; e},{a; c; f},
{a; d; e}, {a; d; f},
{a; e; f},
{b; c; d}, {b; c; e}, {b; c; f},
{b; d; e},{b; d; f},
{b; e; f},

$\{c; d; e\}, \{c; d; f\},$
$\{c; e; f\},$
$\{d; e; f\}$

Koľkými spôsobmi možno zvoliť päťčlenné družstvo z 28 žiakov triedy?

$$C_5(28) = \frac{28!}{5!.23!} = \frac{28.27.26.25.24.23!}{5.4.3.2.23!} = 28.27.26.5 = 98\ 280$$

V triede je 21 chlapcov a 11 dievčat. Koľko rôznych päťčlenných družstiev vieme z nich vytvoriť, ak družstvo sa má skladať z troch chlapcov a z dvoch dievčat?

$$C_3(21).C_2(11) = \frac{21!}{3!.18!}.\frac{11!}{2!.9!} = \frac{21.20.19.18!}{3.2.18!}.\frac{11.10.9!}{2.9!} = 1\ 330.55 = 73\ 150$$

Určte počet prvkov n, ak je počet kombinácií druhej triedy 78.

$n \geq 2$

$n \in \mathbb{N}$

$$C_2(n) = 78$$
$$\frac{n!}{2!.(n-2)!} = 78$$
$$\frac{n.(n-1).(n-2)!}{2.(n-2)!} = 78$$
$$\frac{n.(n-1)}{2} = 78 \qquad /.2$$
$$n.(n-1) = 156 \qquad /-156$$
$$n^2 - n - 156 = 0$$
$$(n-13).(n+12) = 0$$
$$n - 13 = 0 \qquad n + 12 = 0$$
$$n_1 = 13 \qquad n_2 = -12$$

Určte počet prvkov n, ak je počet kombinácií tretej triedy 560.

$n \geq 3$

$n \in \mathbb{N}$

$$C_3(n) = 560$$
$$\frac{n!}{3!.(n-3)!} = 560$$
$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)!}{3.2.(n-3)!} = 560$$
$$\frac{n.(n-1).(n-2)}{6} = 560 \qquad /.6$$
$$n.(n-1).(n-2) = 3\ 360$$

po roznásobení by sme dostali rovnicu tretieho stupňa (kubickú), čo nevieme riešiť
ale približne rovnakú hodnotu dostaneme, ak krajné činitele nahradíme stredným

$$n.(n-1).(n-2) \approx (n-1)^3$$
$$(n-1)^3 \approx 3\ 360 \qquad /\sqrt[3]{\ }$$
$$n - 1 \approx 14{,}98$$
$$n - 1 = 15$$
$$n = 16$$

Ak sa zväčší počet prvkov n o jeden, zväčší sa počet kombinácií tretej triedy o 55. Koľko prvkov je daných?

$n \geq 3$

$n \in \mathbb{N}$

$$C_3(n+1) = C_3(n) + 55$$
$$\frac{(n+1)!}{3!.(n+1-3)!} = \frac{n!}{3!.(n-3)!} + 55$$
$$\frac{(n+1)!}{3!.(n-2)!} = \frac{n!}{3!.(n-3)!} + 55$$
$$\frac{(n+1).n.(n-1)(n-2)!}{3.2.(n-2)!} = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)!}{3.2.(n-3)!} + 55$$

$$\frac{(n+1).n.(n-1)}{6} = \frac{n.(n-1).(n-2)}{6} + 55 \qquad /.6$$

$$(n+1).n.(n-1) = n.(n-1).(n-2) + 330$$

$$n.(n^2-1) = n.(n^2-3n+2) + 330$$

$$n^3 - n = n^3 - 3n^2 + 2n + 330 \qquad /-n^3+n$$

$$0 = -3n^2 + 3n + 330 \qquad /:(-3)$$

$$0 = n^2 - n - 110$$

$$0 = (n+10).(n-11)$$

$$n + 10 = 0 \qquad n - 11 = 0$$

$$n_1 = -10 \qquad n_2 = 11$$

Ak sa zväčší počet prvkov n o dva, zväčší sa počet kombinácií štvrtej triedy 3-krát. Koľko prvkov je daných?

$n \geq 4$

$n \in \mathbb{N}$

$$C_4(n+2) = 3.C_4(n)$$

$$\frac{(n+2)!}{4!.(n+2-4)!} = 3.\frac{n!}{4!.(n-4)!}$$

$$\frac{(n+2)!}{4!.(n-2)!} = 3.\frac{n!}{4!.(n-4)!}$$

$$\frac{(n+2).(n+1).n.(n-1).(n-2)!}{4.3.2.(n-2)!} = 3.\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)!}{4.3.2.(n-4)!} \qquad /.24$$

$$(n+2).(n+1)n.(n-1) = 3.n.(n-1).(n-2).(n-3) \qquad /:[n.(n-1)]$$

$$(n+2).(n+1) = 3.(n-2).(n-3)$$

$$n^2 + 3n + 2 = 3.(n^2 - 5n + 6)$$

$$n^2 + 3n + 2 = 3n^2 - 15n + 18 \qquad /-n^2 - 3n - 2$$

$$0 = 2n^2 - 18n + 16 \qquad /:2$$

$$0 = n^2 - 9n + 8$$

$$0 = (n-1)(n-8)$$

$$n - 1 = 0 \qquad n - 8 = 0$$

$$n_1 = 1 \qquad n_2 = 8$$

Koľko priamok určuje 12 bodov ak:

a, nijaké tri z nich neležia na jednej priamke
b, päť bodov leží na jednej priamke
c, šesť a šesť bodov leží na priamke

a,

dva body určia priamku → vytvárame dvojice: kombinácie druhej triedy (nezáleží na poradí bodov)

$$C_2(12) = \frac{12!}{2!.10!} = \frac{12.11.10!}{2.10!} = 66$$

---

b,

ak body ležia na jednej priamke, vypočítame, koľko rôznych priamok by určili, keby neboli kolineárne – to odčítame

ale určia tú jednu priamku na ktorej ležia, čiže pripočítame 1

$$C_2(5) = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{5.4.3!}{2.3!} = 10$$

$66 - 10 + 1 = 57$

iným spôsobom – rozdelíme do dvoch skupín a tak vyberáme dva body, ktoré určia jednu priamku

body na priamke (5)	body mimo (7)	počet vzniknutých priamok
2	0	$1.C_0(7) = 1.1 = 1$
1	1	$C_1(5).C_1(7) = 5.7 = 35$
0	2	$C_0(5).C_2(7) = 1.\frac{7!}{2!.5!} = 1.21 = 21$
	spolu:	57

---

c,

podobne uvažujeme: šesť bodov (keby neležali na jednej priamke) by určili 15 priamok

$$C_2(6) = \frac{6!}{2!.4!} = 15$$

namiesto tých pätnástich priamok určia iba jednu → o 14 menej

takisto aj druhá šestica bodov z druhej priamky – o 14 menej priamok určia

$66 - 2.14 = 38$

druhým spôsobom – aj v treťom zadaní rozdelíme body do dvoch skupín

body na prvej priamke (6)	body na druhej priamke (6)	počet vzniknutých priamok
2	0	$1.C_0(6) = 1.1 = 1$
1	1	$C_1(6).C_1(6) = 6.6 = 36$
0	2	$C_0(6).1 = 1.1 = 1$
	spolu:	38

Koľko uhlopriečok má pravidelný šestnásťuholník?

najprv vypočítame, koľko priamok (úsečiek) určia tie body

potom z toho počtu odrátame počet strán

$C_2(16) = \frac{16!}{2!.14!} = \frac{16.15.14!}{2.14!} = 120$

$m = 120 - 16 = 104$

bez vzorca: aby vznikla uhlopriečka nesmiem spojiť so susednými vrcholmi (mínus 2 body)
takisto ani so sebou (mínus 1 bod)
čiže ďalšími 13-mi bodmi môžem spojiť vrchol (všeobecne: $n - 3$)
môžem to urobiť v každom z vrcholov – 16-krát (všeobecne: n-krát)
ale pritom každú uhlopriečku rátam dvakrát (v dvoch krajných bodoch)
takže iba polovica súčinu

$m = 13.16:2 = 104$

všeobecne: $m = \frac{(n-3).n}{2}$

Koľko trojuholníkov určuje 15 bodov ak:

a, nijaké tri neležia v jednej priamke (nie sú kolineárne)

b, práve 6 z nich je kolineárnych

a,

$C_3(15) = \frac{15!}{3!.12!} = \frac{15.14.13.12!}{3.2.12!} = 455$

---

b,

tých 6 bodov by určili 20 trojuholníkov – namiesto toho nevznikne z nich ani jeden

$C_3(6) = \frac{6!}{3!.3!} = 20$

$455 - 20 = 435$

iným spôsobom – rozdelíme do dvoch skupín a tak vyberáme tri body, ktoré určia trojuholník

body na priamke (6)	body mimo (9)	počet vzniknutých trojuholníkov
3	0	$0.C_0(9) = 0.1 = 0$
2	1	$C_2(6).C_1(9) = \frac{6!}{2!.4!}.9 = 15.9 = 135$
1	2	$C_1(6).C_2(9) = 6.\frac{9!}{2!.7!} = 6.36 = 216$
0	3	$C_0(6).C_3(9) = 1.\frac{9!}{3!.6!} = 1.84 = 84$
	spolu:	435