Derivácia a extrémy

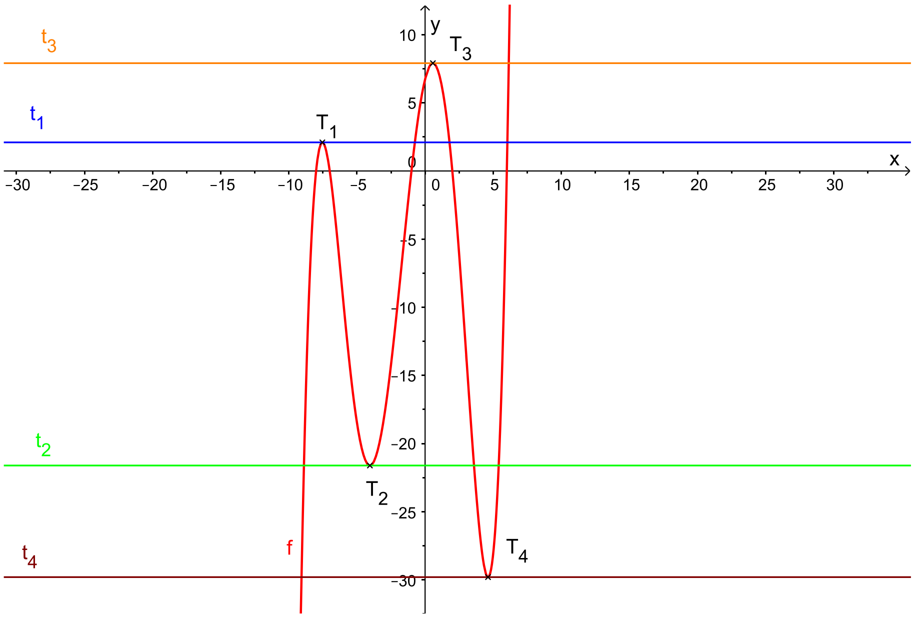
Teraz skúsme nájsť vzťah medzi hodnotou derivácie a extrémami

D. Funkcia f má v bode x_1 ***lokálne minimum***, ak funkcia na otvorenom intervale $(a_1; b_1)$ práve v x_1 nadobudne najmenšiu hodnotu.

$$\exists(a_1; b_1) \subset D_f: x_1 \in (a_1; b_1) \wedge \forall x \in (a_1; b_1) \setminus \{x_1\} \Rightarrow f(x_1) < f(x)$$

D. Funkcia f má v bode x_2 ***lokálne maximum***, ak funkcia na otvorenom intervale $(a_2; b_2)$ práve v x_2 nadobudne najväčšiu hodnotu.

$$\exists(a_2; b_2) \subset D_f: x_2 \in (a_2; b_2) \wedge \forall x \in (a_2; b_2) \setminus \{x_2\} \Rightarrow f(x) < f(x_2)$$



Pri monotónnosti sme videli, že hodnota derivácie súvisí s monotónnosťou – presnejšie so znamienkom. Ak funkcia má extrém v nejakom bode:

- ak je to minimum, potom pred tým bodom musela byť klesajúca a potom rastúca
- ak je to maximum, potom pred tým bodom musela byť rastúca a potom klesajúca

To znamená, že hodnoty derivácie zo záporných hodnôt prejdú do kladných alebo naopak.
Ale aj z grafu vidíme, že dotyčnice v takýchto bodoch sú vodorovné (rovnobežné s x-ovou osou). Smerový uhol je nulový. A smernica (ako tangens nulového uhla) je takisto nulová.

Takže hodnoty derivácií v extrémoch sa rovnajú nule. Ale vždy, keď sa hodnota derivácie rovná nule, v tom bude je aj extrém? Zoberme jednoduché príklady.

pr.

$$f(x) = x^2$$

derivujme

$$f'(x) = (x^2)' = 2x$$

nájdime bod(-y), kde nadobudne derivácia nulovú hodnotu → riešme rovnicu

$$f'(x) = 0$$
$$2x = 0 \qquad /:2$$
$$x_0 = 0$$

teoreticky v bode x_0 má extrém – kto pozná kvadratickú rovnicu, vie, že aj má (globálne minimum)

pr.

$$g(x) = x^3$$

derivujme

$$g'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

znovu hľadáme nulové hodnoty

$$g'(x) = 0$$
$$3x^2 = 0 \qquad /:3$$
$$x^2 = 0 \qquad /\sqrt{}$$

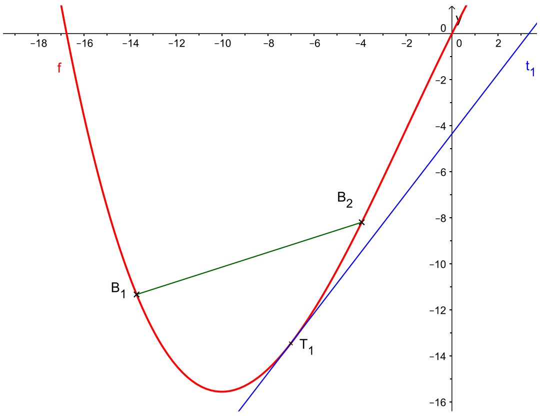
$x_0 = 0$

teoreticky v bode x_0 má extrém – kto pozná kubickú rovnicu, vie, že je rastúca na celom definičnom obore, a nemá extrémy (pri monotónnosti sme videli obrázok – okolie začiatku súradnicovej sústavy – ako sa správa kubická funkcia: má vodorovnú dotyčnicu)

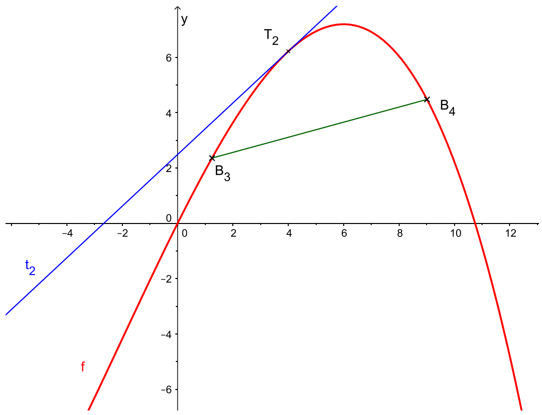
Čo potom má kubická funkcia v bode $x_0 = 0$?

D. Funkcia (krivka) je ***konvexná*** na nejakom intervale I_1, ak na tom intervale spojnica ľubovoľných dvoch bodov krivky ide nad krivkou (dotyčnica v jednotlivých bodoch toho intervalu je pod krivkou).

D. Funkcia (krivka) je ***konkávna*** na nejakom intervale I_2, ak na tom intervale spojnica ľubovoľných dvoch bodov krivky ide pod krivkou (dotyčnica v jednotlivých bodoch toho intervalu je nad krivkou).

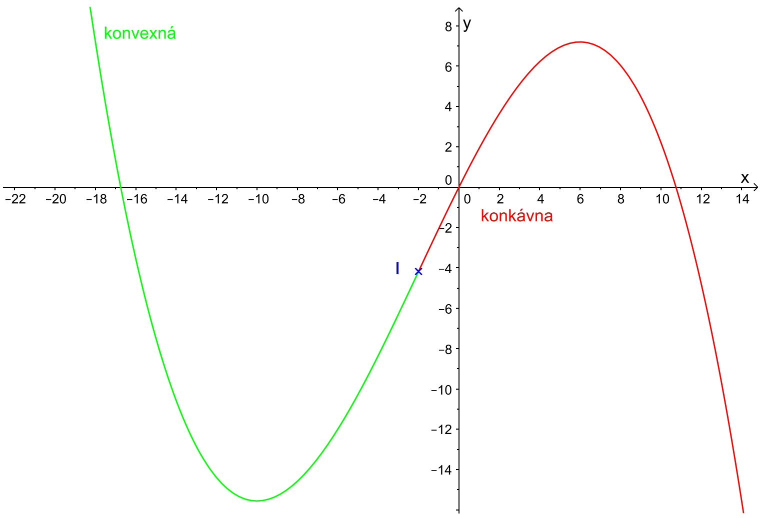


konvexná krivka



konkávna krivka

D. Hranica medzi konvexnou a konkávnou časťou funkcie (krivky) sa volá ***inflexný bod***.



A hodnota derivácie v inflexnom bode môže byť nulová.
Takže funkcia $g(x) = x^3$ v bode x_0 má práve inflexný bod – pred bodom je funkcia konkávna a za bodom konvexná. Preto sa rovná derivácia nule.
Zhrňme to všetko:

funkcia ak má extrém, potom tam derivácia je nulová

ak derivácia je nulová, nemusí tam mať extrém

V. (žiadúca ale nepostačujúca) Ak funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém, potom hodnota derivácie v tom bode sa rovná nule: $f'(x_0) = 0$.

D. Body, v ktorých hodnota derivácie nadobudne nulovú hodnotu, sa volajú ***stacionárne body*** funkcie.

Potrebujeme vetu, pomocou ktorej vieme jednoznačne určiť, v ktorých zo stacionárnych bodov má funkcia extrém (postačujúca).

D. ***derivácia vyššieho rádu*** (pomocou matematickej indukcie)

$$f^{(n)}(x) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

druhú deriváciu funkcie dostaneme ak prvú deriváciu znovu derivujeme tretiu deriváciu funkcie dostaneme ak druhú deriváciu znovu derivujeme, …

$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$; $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$; $f^{IV}(x) = \left(f'''(x)\right)'$; $f^{V}(x) = \left(f^{\square}(x)\right)'$; …

V. (postačujúca) Nech funkcia f je n-krát derivovateľná v bode x_0. Hodnoty všetkých derivácií v bode x_0 sa rovnajú nule až po deriváciu (n – 1)-ho rádu. Ak n-tá derivácia sa nerovná nule, potom podľa párnosti rádu môžeme povedať:

- ak n je párne číslo (pri párnej derivácii nadobudla funkcia prvýkrát nenulovú hodnotu), potom v bode x_0 má extrém
  - ak derivácia je kladná, potom v bode x_0 má lokálne minimum
  - ak derivácia je záporná, potom v bode x_0 má lokálne maximum
- ak n je nepárne číslo (pri nepárnej derivácii nadobudla funkcia prvýkrát nenulovú hodnotu), potom v bode x_0 má inflexný bod

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, ale $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

$n = 2k\ (k \in \mathbb{N}) \land f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ v x_0 má lokálne minimum

$n = 2k\ (k \in \mathbb{N}) \land f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ v x_0 má lokálne maximum

$n = 2k + 1\ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow$ v x_0 má inflexný bod

V. Ak hodnota druhej derivácie je kladná na intervale I_1, potom funkcia na tom intervale je konvexná.

$\forall x \in I_1$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ konvexná na I_1

V. Ak hodnota druhej derivácie je záporná na intervale I_2, potom funkcia na tom intervale je konkávna.

$\forall x \in I_2$: $f''(x) < 0 \Rightarrow$ konkávna na I_2

V. Ak $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, potom funkcia f má v bode x_0 inflexný bod.

príklad:

Nájdite body, v ktorých má funkcia lokálne extrémy, a určte, aké sú tieto extrémy.

a, $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$ b, $g(x) = -x^2 - 6x + 5$

c, $h(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 11$ d, $i(x) = x^4 + 20x^3 + 64x^2 - 192x + 1$

a, najprv derivujeme funkciu

$f'(x) = (5x^2 + 4x - 3)' = 10x + 4$

nájdime stacionárne body – riešime rovnicu, kde je funkčná hodnota nulová

$$f'(x) = 0$$
$$10x + 4 = 0 \qquad /-4$$
$$10x = -4 \qquad /:10$$
$$x_0 = -0{,}4$$

derivujeme ešte raz

$f''(x) = (10x + 4)' = 10$

dosadíme do druhej derivácie stacionárny bod

$f''(x_0) = f''(-0{,}4) = 10$

dostali sme nenulovú hodnotu ($f''(x_0) \neq 0$) – stala sa to pri druhej derivácii $\Rightarrow$ má extrém
a nakoľko hodnota je kladná ($f''(x_0) > 0$) $\Rightarrow$ funkcia f v bode $x_0 = -0{,}4$ má lokálne minimum

---

b, najprv derivujeme funkciu

$g'(x) = (-x^2 - 6x + 5)' = -2x - 6$

nájdime stacionárne body – riešime rovnicu, kde je funkčná hodnota nulová

$$g'(x) = 0$$
$$-2x - 6 = 0 \qquad /+6$$
$$-2x = 6 \qquad /:(-2)$$
$$x_0 = -3$$

derivujeme ešte raz

$g''(x) = (-2x - 6)' = -2$

dosadíme do druhej derivácie stacionárny bod

$g''(x_0) = g''(-3) = -2$

dostali sme nenulovú hodnotu ($g''(x_0) \neq 0$) – stala sa to pri druhej derivácii ⇒ má extrém a nakoľko hodnota je záporná ($g''(x_0) < 0$) ⇒ funkcia g v bode $x_0 = -3$ má lokálne maximum

---

c, najprv derivujeme funkciu

$h'(x) = (2x^3 + 9x^2 - 24x + 11)' = 6x^2 + 18x - 24$

nájdime stacionárne body – riešime rovnicu, kde je funkčná hodnota nulová

$$h'(x) = 0$$
$$6x^2 + 18x - 24 = 0 \qquad /:6$$
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

vieme rozložiť na súčin koreňových činiteľov

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

$x_1 = -4$ $\qquad$ $x_2 = 1$

derivujeme ešte raz

$h''(x) = (6x^2 + 18x - 24)' = 12x + 18$

dosadíme do druhej derivácie stacionárne body (naraz iba jeden a hneď skúsime aj typ extrému určiť, ak má v tom bode)

$h''(x_1) = h''(-4) = 12.(-4) + 18 = -30$

dostali sme nenulovú hodnotu ($h''(x_1) \neq 0$) – stala sa to pri druhej derivácii ⇒ má extrém a nakoľko hodnota je záporná ($h''(x_1) < 0$) ⇒ funkcia h v bode $x_1 = -4$ má lokálne maximum

teraz nasleduje druhý stacionárny bod

$h''(x_2) = h''(1) = 12.1 + 18 = 30$

dostali sme nenulovú hodnotu ($h''(x_2) \neq 0$) – stala sa to pri druhej derivácii ⇒ má extrém a nakoľko hodnota je kladná ($h''(x_2) > 0$) ⇒ funkcia h v bode $x_2 = 1$ má lokálne minimum

---

d, najprv derivujeme funkciu

$i'(x) = (x^4 + 20x^3 + 64x^2 - 192x + 1)' = 4x^3 + 60x^2 + 128x - 192$

nájdime stacionárne body

$$i'(x) = 0$$
$$4x^3 + 60x^2 + 128x - 192 = 0$$

je to rovnica tretieho stupňa – ak nájdeme jeden koreň, môžeme vydeliť polynóm s výrazom (x – koreň) preto dosadíme malé celé čísla – hľadáme medzi nimi koreň

$4.1^3 + 60.1^2 + 128.1 - 192 = 4 + 60 + 128 - 192 = 0$

prvý koreň a tým aj stacionárnym bodom funkcie je $x_1 = 1$

takže teraz môžeme vydeliť mnohočlen s $(x - 1)$ – podiel bude výraz o jedno menšieho stupňa (kvadratický)

$(4x^3 + 60x^2 + 128x - 192):(x - 1) = 4x^2 + 64x + 192$

ďalšie stacionárne body dostaneme riešením kvadratickej rovnice, lebo

$4x^3 + 60x^2 + 128x - 192 = (x - 1)(4x^2 + 64x + 192)$

rovnica prejde do tvaru

$(x - 1)(4x^2 + 64x + 192) = 0$

a to znamená, že jeden z činiteľov sa rovná nule

$$4x^2 + 64x + 192 = 0 \qquad /:4$$
$$x^2 + 16x + 48 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4.1.48}}{2.1} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 192}}{2} = \frac{-16 \pm 8}{2} = \begin{matrix} \nearrow -4 \\ \searrow -12 \end{matrix}$$

čiže ďalšie stacionárne body sú: $x_2 = -4$ a $x_3 = -12$

znovu derivujeme funkciu

$i''(x) = (4x^3 + 60x^2 + 128x - 192)' = 12x^2 + 120x + 128$

a teraz za radom dosadíme stacionárne body

$i''(x_1) = i''(1) = 12.1^2 + 120.1 + 128 = 12 + 120 + 128 = 260$

dostali sme nenulovú hodnotu ($i''(x_1) \neq 0$) – stala sa to pri druhej derivácii ⇒ má extrém
a nakoľko hodnota je kladná ($i''(x_1) > 0$) ⇒ funkcia i v bode $x_1 = 1$ má lokálne minimum

$i''(x_2) = i''(-4) = 12.(-4)^2 + 120.(-4) + 128 = 192 - 480 + 128 = -160$

dostali sme nenulovú hodnotu ($i''(x_2) \neq 0$) – stala sa to pri druhej derivácii ⇒ má extrém
a nakoľko hodnota je záporná ($i''(x_2) < 0$) ⇒ funkcia i v bode $x_2 = -4$ má lokálne maximum

$i''(x_3) = i''(-12) = 12.(-12)^2 + 120.(-12) + 128 = 1\,728 - 1\,440 + 128 = 416$

dostali sme nenulovú hodnotu ($i''(x_3) \neq 0$) – stala sa to pri druhej derivácii ⇒ má extrém
a nakoľko hodnota je kladná ($i''(x_3) > 0$) ⇒ funkcia i v bode $x_3 = -12$ má lokálne minimum