Metóda integrovania per partes
(parciálne integrovanie – integrovanie po častiach)

Základom tejto metódy je derivácia súčinu funkcií.

$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

integrovaním obidvoch strán dostaneme

$\int (f.g)'(x)\,dx = \int f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\,dx$

integrál súčtu funkcií je súčet integrálov funkcií – môžeme rozdeliť do dvoch integrálov pravú stranu

$\int (f.g)'(x)\,dx = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx$

integrálom derivácie súčinu funkcií (ľavej strany) je práve súčin tých funkcií

$(f.g)(x) = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx \qquad /- \int f(x).g'(x)\,dx$

prenesením jedného neurčitého integrálu prejde do tvaru

$f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx = \int f'(x).g(x)\,dx$

už iba vymeniť strany, a dostaneme vetu:

V. $\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$

P. Táto veta slúži na integrovanie súčinu funkcií. Ale nie je to všeobecne použiteľné. Podľa tejto vety integrál súčinu dvoch funkcií, z ktorých jedna je derivovaná [jeden činiteľ vznikol deriváciou funkcie: $f(x) \to f'(x)$], môžeme vypočítať ako rozdiel.

Určité podmienky musia spĺňať tie funkcie:

- derivovanú funkciu musíme vedieť integrovať (poznať jej neurčitý integrál – funkciu z ktorej vznikla derivovaním)
- súčin funkcií vo vnútri integrálu na pravej strane [$f(x).g'(x)$] musí byť integrovateľný – alebo aspoň jednoduchší

P. Ani na výber funkcií nie je nejaké všeobecné pravidlo, pomocou ktorého by sme vedeli jednoznačne určiť v súčine, ktorá funkcia je tá derivovaná [$f'(x)$] a ktorá nie [$g(x)$]. Ak v zadaní je uvedené, že integrovať máme práve tou metódou per partes, z toho už vieme, že jeden z činiteľov je derivovaná funkcia – takže máme iba dve možnosti.

príklad:

Vypočítajte metódou per partes: $\int x.e^x\,dx$

zvoľme si funkcie: nech je tou derivovanou funkciou zo súčinu: $f'(x) = x$
potom tá nederivovaná bude: $g(x) = e^x$

určíme $f(x)$ a $g'(x)$

$f'(x) = x \quad \to \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$g(x) = e^x \quad \to \quad g'(x) = e^x$

P. V tomto prípade nezvykneme písať za integrálom „+ c“

takže podľa novej vety môžeme písať:

$\int x.e^x\,dx = \frac{x^2}{2}.e^x - \int \frac{x^2}{2}.e^x\,dx$

čiže namiesto výpočtu integrálu $\int x.e^x\,dx$ máme vypočítať $\int \frac{x^2}{2}.e^x\,dx$

Integrál, čo sme dostali, takisto nevieme vypočítať. Navyše, ak nejaký laik porovná tie dva integrály, aj jemu vyzerá ten druhý ako zložitejší problém v porovnaní s pôvodným zadaním. Asi sme si zvolili tie funkcie nesprávne. Skúsme opačne.

$f'(x) = e^x \quad \to \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$

$g(x) = x \quad \to \quad g'(x) = (x)' = 1$

znovu dosadíme do vety:

$\int x.e^x\,dx = e^x.x - \int 1.e^x\,dx =$

tento integrál už ľahko zvládneme (neurčitý integrál elementárnej funkcie)

$= x.e^x - e^x + c$

Vypočítajte metódou per partes: $\int x^2.e^x\,dx$

zvoľme si funkcie:

$f'(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$

$g(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad g'(x) = (x^2)' = 2x$

$\int x^2.e^x\,dx = e^x.x^2 - \int 2x.e^x\,dx = x^2.e^x - 2.\int x.e^x\,dx =$

teraz využijeme predchádzajúci výsledok

$= x^2.e^x - 2.[x.e^x - e^x] + c = x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x + c$

Ešte som ostal dlžný neurčitým integrálom elementárnych funkcií logaritmických – ln x a $\log_a x$. Doteraz sme nepoznali metódu, ktorou by sa dal vypočítať integrál. Skúsme metódou per partes.

Vypočítajte metódou per partes: $\int \ln x\,dx$

zvoľme si funkcie: …

veď tu nemáme iba jednu funkciu – chýba druhý činiteľ súčinu

ale môžeme pridať ako činiteľ číslo 1 – tým sa nemení funkcia a ani zadanie

$\int \ln x\,dx = \int 1.\ln x\,dx =$

$f'(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \ln x\,dx = ???$

takto znovu ten istý problém sa objaví: nepoznáme neurčitý integrál ln x

tak si zvoľme opačne

$f'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 1\,dx = x$

$g(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

znovu dosadíme

$\int \ln x\,dx = \int 1.\ln x\,dx = x.\ln x - \int x.\frac{1}{x}\,dx = x.\ln x - \int 1\,dx = x.\ln x - x + c$

Vypočítajte: $\int \log_a x\,dx$

$$\int \log_a x\,dx = \int \frac{\ln x}{\ln a}\,dx = \frac{1}{\ln a}\int \ln x\,dx = \frac{1}{\ln a}(x.\ln x - x) + c = x.\frac{\ln x}{\ln a} - \frac{x}{\ln a} + c = x.\log_a x - \frac{x}{\ln a} + c$$

Vypočítajte metódou per partes: $\int x.\cos x\,dx$

zvoľme si funkcie:

$f'(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x$

$g(x) = x \quad \rightarrow \quad g'(x) = (x)' = 1$

$\int x.\cos x\,dx = \sin x.x - \int \sin x.1\,dx = x.\sin x - (-\cos x) + c = x.\sin x + \cos x + c$

Vypočítajte metódou per partes: $\int e^x.\sin x\,dx$

$f'(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$

$g(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad g'(x) = (\sin x)' = \cos x$

$\int e^x.\sin x\,dx = e^x.\sin x - \int e^x.\cos x\,dx$

na tento integrál ešte raz použijeme metódu per partes

$h'(x) = e^x \quad \rightarrow \quad h(x) = \int h'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$

$i(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad i'(x) = (\cos x)' = -\sin x$

$\int e^x.\cos x\,dx = e^x.\cos x - \int e^x.(-\sin x)\,dx = e^x.\cos x + \int e^x.\sin x\,dx$

dosadíme výsledok

$\int e^x.\sin x\,dx = e^x.\sin x - [e^x.\cos x + \int e^x.\sin x\,dx] = e^x.\sin x - e^x.\cos x - \int e^x.\sin x\,dx$

upravme nasledujúcu rovnicu – vyjadrime z toho hľadaný integrál

$\int e^x.\sin x\,dx = e^x.\sin x - e^x.\cos x - \int e^x.\sin x\,dx \qquad /+\int e^x.\sin x\,dx$

$2.\int e^x.\sin x\,dx = e^x.\sin x - e^x.\cos x \qquad /:2$

$\int e^x.\sin x\,dx = \frac{1}{2}.[e^x.\sin x - e^x.\cos x] + c$

Zhrnutie

$\int 0\,dx = c$	$\int c\,dx = c.x + d$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln\|\cos x\| + c$	$\int \mathrm{cotg}\,x\,dx = \ln\|\sin x\| + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\,x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg}\,x + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \ln x\,dx = x.\ln x - x + c$	$\int \log_a x\,dx = x.\log_a x - \frac{x}{\ln a} + c$
$\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + c$	$\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + c$
$\int \mathrm{th}\,x\,dx = \ln \mathrm{ch}\,x + c$	$\int \mathrm{cth}\,x\,dx = \ln \| \mathrm{sh}\,x \| + c$
$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} dx = \mathrm{th}\,x + c$	$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\mathrm{cth}\,x + c$