Ismétléses variációk
(Variácie s opakovaním)

D. ***n* elem *k*-ad osztályú ismétléses variációja** (variácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním) az n elemű halmazból képezett rendezett elemk-sok összessége, ahol az egyes elemk-sokban az elemek ismétlődhetnek.
T. Az ismétléses variációk számát az alábbi képlet segítségével számolhatjuk:

$$V'_k(n) = \underbrace{n.n.n.\ldots.n}_{k\ \text{tényező}} = n^k$$

példa:

Soroljuk fel az a, b, c, d elemekből képzett másodosztályú ismétléses variációit!

[a; a], [a; b], [a; c], [a; d],
[b; a], [b; b], [b; c], [b; d],
[c; a], [c; b], [c; c], [c; d],
[d; a], [d; b], [d; c], [d; d]

Hány különböző ötjegyű természetes szám alkotható az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyekből, ha a számjegyek ismétlődhetnek?

$V'_5(6) = 6^5 = 7\,776$

Hány különböző ötjegyű természetes szám alkotható a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből, ha a számjegyek ismétlődhetnek?

ezen feladatokat is kétféleképp oldhatjuk: képlettel és megfontolással

kiszámolni az ötjegyűeket (beleértve azokat a számokat is, amik nullával kezdődnek) – az előző feladat eredménye

ezután ebből levonni annyit, amennyi a keletkezett számokból nullával kezdődik – vagyis a négyjegyű számok mennyiségét, amit a nulla nélkül a számjegyekből képezhetünk

$V'_5(6) - V'_4(6) = 7\,776 - 1\,296 = 6\,480$

elmélkedéssel: az első helyre nem mehet a nulla (öt lehetőség); az összes többi helyre mehet mind a hat

$5.6.6.6.6 = 6\,480$

Hány különböző egytől ötjegyűig terjedő természetes szám képezhető a 0, 1, 2 számjegyekből?

egyjegyű:		$= 2$
kétjegyű:	$V'_2(3) - V'_1(3) = 2.3$	$= 6$
háromjegyű:	$V'_3(3) - V'_2(3) = 2.3.3$	$= 18$
négyjegyű:	$V'_4(3) - V'_3(3) = 2.3.3.3$	$= 54$
ötjegyű:	$V'_5(3) - V'_4(3) = 2.3.3.3.3$	$= 162$
összesen:		$= 242$

Hány különböző négyjegyű páros szám alkotható a 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből, ha a számjegyek ismétlődhetnek?

a szám páros, ha páros számmal végződik → a végén kezdjük

az utolsó pozícióra (a negyedik hely) csak a 2 vagy a 4 kerülhet – két lehetőség

a többire bármelyik

$2.5.5.5 = 250 = 2.V'_3(5)$

Hány különböző elemből képezhető 14 641 negyedosztályú ismétléses variáció?

$V'_4(n) = 14\,641$

$n^4 = 14\,641 \qquad /\sqrt[4]{\ }$

$n = 11$

Ha megnöveljük az elemszámot tizenhárommal, a belőle képzett negyedosztályú ismétléses variációk száma tizenhatszorosára nő. Határozzuk meg az eredeti n elemszámot!

$n \in \mathbb{N}$

$V'_4(n + 13) = 16.V'_4(n)$

$$(n + 13)^4 = 16.n^4 \qquad /:n^4$$

$$\frac{(n+13)^4}{n^4} = 16$$

$$\left(\frac{n+13}{n}\right)^4 = 16 \qquad /\sqrt[4]{}$$

$$\frac{n+13}{n} = 2 \qquad /.n$$

$$n + 13 = 2n \qquad /-n$$

$$13 = n$$

Ha megnöveljük az elemszámot eggyel, a belőle képzett harmadosztályú ismétléses variációk száma 169-cel nő. Határozzuk meg az eredeti n elemszámot!

$n \in \mathbb{N}$

$$V_3'(n + 1) = V_3'(n) + 169$$

$$(n + 1)^3 = n^3 + 169$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 169 \qquad /- n^3 - 169$$

$$3n^2 + 3n - 168 = 0 \qquad /:3$$

$$n^2 + n - 56 = 0$$

$$(n + 8)(n - 7) = 0$$

$$n + 8 = 0 \qquad n - 7 = 0$$

$$n_1 = -8 \qquad n_2 = 7$$

Mennyi elemünk van, ha a belőlük képzett negyedosztályú ismétléses variációk száma 81-szerese a másodosztályú ismétlés nélküli variációk számának?

$n \in \mathbb{N}$

$$V_4'(n) = 81.V_2'(n)$$

$$n^4 = 81.n^2 \qquad /:n^2$$

$$n^2 = 81 \qquad /\sqrt{}$$

$$n = 9$$