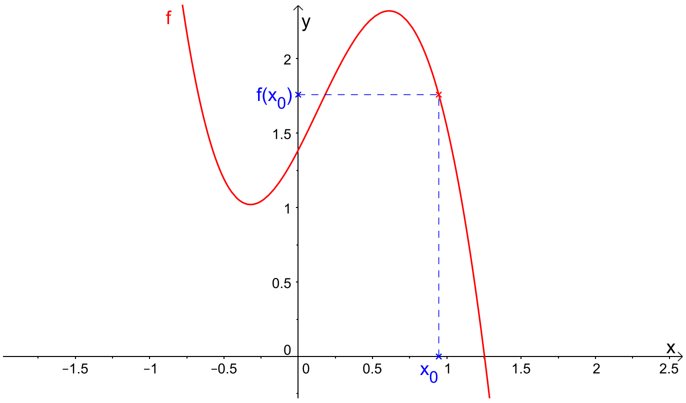
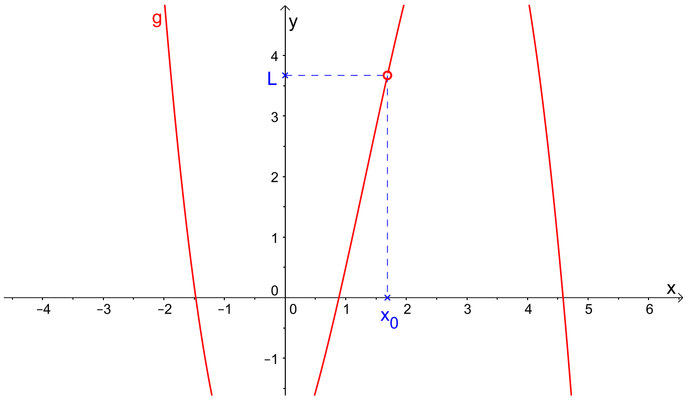
A függvény határértéke
(Limita funkcie)

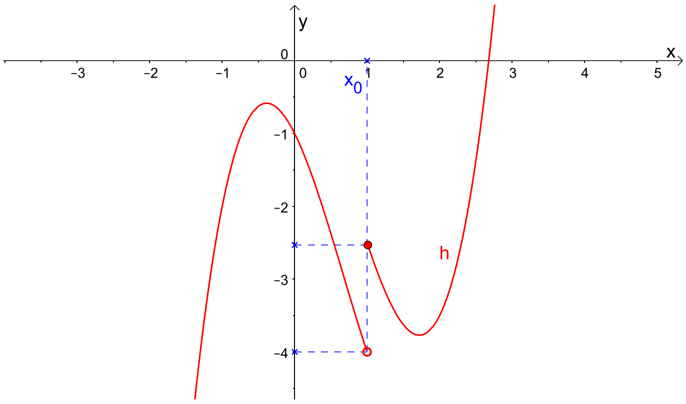
a függvény tulajdonságai az egyes pontokban: x_0



$x_0 \in D$
van határértértéke, és a határértéke azonos a függvényértékkel



$x_0 \notin D$
van határértértéke, és az egyenlő L-el



$x_0 \in D$
nincs határértéke

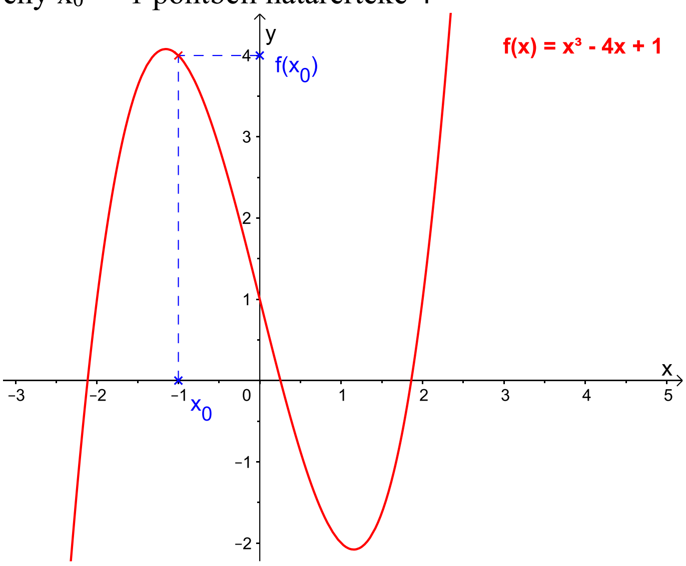
példa:

$f(x) = x^3 - 4x + 1$; $x_0 = -1$

behelyettesítünk – megpróbáljuk kiszámolni a függvényértéket

$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1) + 1 = -1 + 4 + 1 = 4$

vagyis az f függvény $x_0 = -1$ pontbeli határértéke 4



$g(x) = \frac{x^3-8}{2x-4}$; $x_0 = 2$

behelyettesítünk – megpróbáljuk kiszámolni a függvényértéket

$g(2) = \frac{2^3-8}{2.2-4} = \frac{8-8}{4-4} = \frac{0}{0}$

ezt nem lehet kiszámolni (a 2 szám hiányzik a g függvény értelmezési tartományából: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$)
próbáljuk átalakítani a függvényt – a számlálót képlettel, a nevezőt kiemeléssel

$g(x) = \frac{x^3-8}{2x-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)} = \frac{x^2+2x+4}{2}$

jelöljük az egyszerűsített függvényt csillaggal – újra behelyettesítünk, most az egyszerűsített alakba

$g^*(2) = \frac{2^2+2.2+4}{2} = \frac{4+4+4}{2} = 6$

a g függvény $x_0 = 2$ pontbeli határértéke L = 6

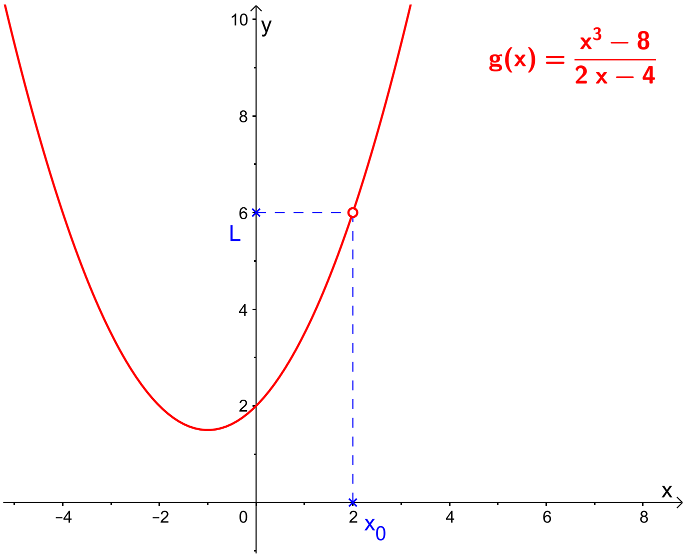
ha az x értékekkel balról közelítünk (kisebb értékek irányából) az $x_0 = 2$ ponthoz, az alábbi függvényértékeket kapjuk:

$g(1{,}9) = 5{,}705$; $g(1{,}95) = 5{,}851$; $g(1{,}98) = 5{,}940$; $g(1{,}99) = 5{,}970$; $g(1{,}999) = 5{,}997$; …

ha az x értékekkel jobbról közelítünk (nagyobb értékek irányából) az $x_0 = 2$ ponthoz, az alábbi függvényértékeket kapjuk:

$g(2{,}1) = 6{,}305$; $g(2{,}05) = 6{,}151$; $g(2{,}02) = 6{,}060$; $g(2{,}01) = 6{,}030$; $g(2{,}001) = 6{,}003$; …

a függvényértékek is közelítenek mindkét oldalról a 6 számhoz



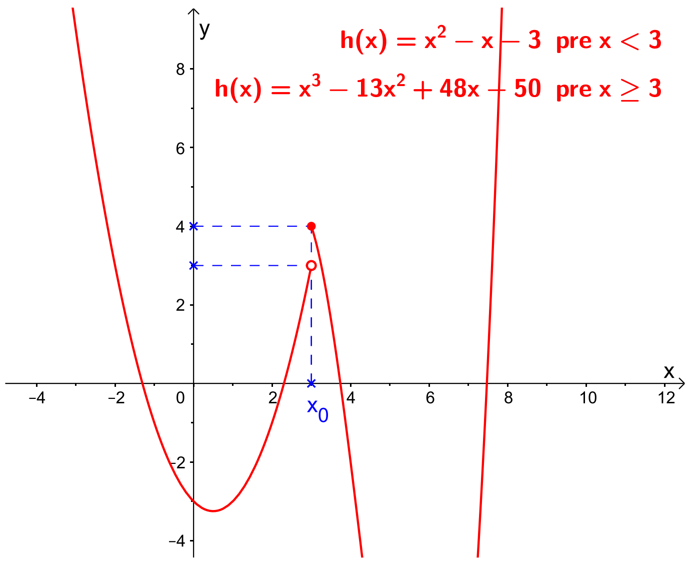
$$h(x) = \begin{cases} x^2 - x - 3 & \text{ha } x < 3 \\ x^3 - 13x^2 + 48x - 50 & \text{ha } x \geq 3 \end{cases}; \quad x_0 = 3$$

ha az x értékekkel balról közelítünk (kisebb értékek irányából) az $x_0 = 3$ ponthoz, a felső függvénybe kell behelyettesítenünk ($x^2 – x – 3$)
az alábbi függvényértékeket kapjuk:

$h(2{,}9) = 2{,}510$; $h(2{,}95) = 2{,}753$; $h(2{,}98) = 2{,}900$; $h(2{,}99) = 2{,}950$; $h(2{,}999) = 2{,}995$; …

ha az x értékekkel jobbról közelítünk (nagyobb értékek irányából) az $x_0 = 3$ ponthoz, az alsó függvénybe kell behelyettesítenünk ($x^3 – 13x^2 + 48x – 50$)
az alábbi függvényértékeket kapjuk:

$h(3{,}1) = 3{,}661$; $h(3{,}05) = 3{,}840$; $h(3{,}02) = 3{,}938$; $h(3{,}01) = 3{,}970$; $h(3{,}001) = 3{,}997$; …



teljesen más értékhez közelítenek a függvényértékek balról, mint jobbról, ezért ennek a függvénynek az $x_0 = 3$ pontban nincs határértéke

---

vegyünk az x értékeknek egy sorozatát: x_1; x_2; x_3; x_4; …

a páratlan tagok kisebbek lesznek x_0-tól (balra az x_0-tól) a párosak nagyobbak (jobbra az x_0-tól)

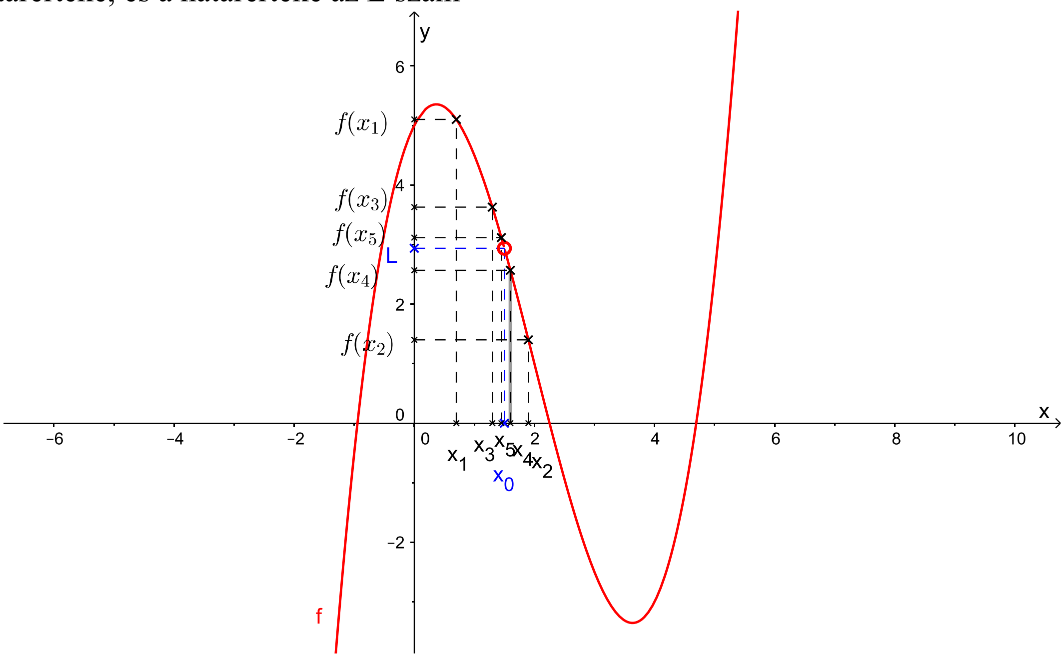
a sorozat minden következő tagja feleakkora távolságra lesz az x_0-tól, mint az előző tag

$|x_1 - x_0| = a$; $|x_2 - x_0| = \frac{a}{2}$; $|x_3 - x_0| = \frac{a}{4}$; $|x_4 - x_0| = \frac{a}{8}$; $|x_5 - x_0| = \frac{a}{16}$; …

és ezt folytatjuk a végtelenségig

figyeljük meg, hogy viselkednek a függvényértékek: $f(x_1)$; $f(x_2)$; $f(x_3)$; $f(x_4)$; …

ha ezek az értékek közelítenek valamilyen L számhoz, akkor az f függvénynek az x_0 pontban van határértéke, és a határértéke az L szám



határérték egy véges pontban

D. Az f függvénynek az x_0 pontban L a ***határértéke***, ha tetszőlegesen közel tudok kerülni a függvényértékekkel az L számhoz.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \text{ ak } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0: \forall\, x \in D_f: |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

T. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A$; $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$; $c \in \mathbb{R}$

a, összeg határértéke egyenlő a határértékek összegével

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = A + B$$

b, függvény számsorosának a határértéke egyenlő a határérték számszorosával

$$\lim_{x\to x_0} c.f(x) = c.\lim_{x\to x_0} f(x) = \text{c.A}$$

c, függvények szorzatának a határértéke egyenlő a határértékek szorzatával

$$\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).\lim_{x\to x_0} g(x) = \text{A.B}$$

d, függvények hányadosának a határértéke egyenlő a határértékek hányadosával (B ≠ 0)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$$

Nevezetes határértékek

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

végtelen, mint határérték

D. Az f függvény határértéke az x_0 pontban végtelen, ha az x_0 környezetében a függvényértékeknek nincs felső korlátja.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \text{ ak } \forall\ H\ \exists\ \delta(H) > 0: \forall\ x \in D_f: |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > H$$

D. Az f függvény határértéke az x_0 pontban mínusz végtelen, ha az x_0 környezetében a függvényértékeknek nincs alsó korlátja.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty, \text{ ak } \forall\ D\ \exists\ \delta(D) > 0: \forall\ x \in D_f: |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < D$$

határérték a végtelenben

D. Az f függvény határértéke a végtelenben az L szám, ha az x értékeket növelve a függvényértékekkel tetszőleges közel kerülhetek az L értékhez.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \text{ ak } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ H > 0: \forall\ x \in D_f: x > H \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

D. Az f függvény határértéke a mínusz végtelenben az L szám, ha az x értékeket csökkentve a függvényértékekkel tetszőleges közel kerülhetek az L értékhez.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L, \text{ ak } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ D < 0: \forall\ x \in D_f: x < D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

T. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

T. $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n} & ha\ m = n \\ 0 & ha\ m < n \\ \nexists & ha\ m > n \end{cases}$$

Biz.

a törtkifejezés minden tagját elosztjuk az x legnagyobb hatványával (x^m vagy x^n)

a, $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_m x^m}{x^m} + \frac{a_{m-1}x^{m-1}}{x^m} + \cdots + \frac{a_1 x}{x^m} + \frac{a_0}{x^m}}{\frac{b_m x^m}{x^m} + \frac{b_{m-1}x^{m-1}}{x^m} + \cdots + \frac{b_1 x}{x^m} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} =$$

minden olyan tagnak, melynek nevezőjében legalább az első hatványa szerepel az x-nek, a határértéke nulla

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_m + 0 + \cdots + 0 + 0}{b_m + 0 + \cdots + 0 + 0} = \frac{a_m}{b_m}$$

b, $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_m x^m}{x^n} + \frac{a_{m-1}x^{m-1}}{x^n} + \cdots + \frac{a_1 x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n}}{\frac{b_n x^n}{x^n} + \frac{b_{n-1}x^{n-1}}{x^n} + \cdots + \frac{b_1 x}{x^n} + \frac{b_0}{x^n}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_m}{x^{n-m}} + \frac{a_{m-1}}{x^{n-m+1}} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{0 + 0 + \cdots + 0 + 0}{b_n + 0 + \cdots + 0 + 0} = \frac{0}{b_n} = 0$$

c, $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_m x^m}{x^m} + \frac{a_{m-1}x^{m-1}}{x^m} + \cdots + \frac{a_1 x}{x^m} + \frac{a_0}{x^m}}{\frac{b_n x^n}{x^m} + \frac{b_{n-1}x^{n-1}}{x^m} + \cdots + \frac{b_1 x}{x^m} + \frac{b_0}{x^m}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{a_m+\frac{a_{m-1}}{x}+\dots+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_0}{x^m}}{\frac{b_n}{x^{m-n}}+\frac{b_{n-1}}{x^{m-n+1}}+\dots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_m+0+\dots+0+0}{0+0+\dots+0+0} = \frac{a_m}{0} \Rightarrow$$ nem létezik hányados

D. Az f függvény ***folytonos*** (spojitá) az x_0 pontban, ha ott van határértéke és az megegyezik a függvényértékkel.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

példa:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x+1}{3x^2+2x+20} =$$

ha létezik függvényérték az x_0 pontban, akkor a határértéke megegyezik ezzel

ezért behelyettesítjük a pontot, és megpróbáljuk kiszámolni

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x+1}{3x^2+2x+20} = \frac{(-2)^2-3(-2)+1}{3(-2)^2+2(-2)+20} = \frac{4+6+1}{3.4-4+20} = \frac{11}{28}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{2x^2-4x-6} =$$

behelyettesítjük a pontot

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{2x^2-4x-6} = \frac{3^2+3.3-18}{2.3^2-4.3-6} = \frac{9+9-18}{18-12-6} = \frac{0}{0}$$

nullát kaptunk a számlálóban és a nevezőben is ⇒ az $x_0 = 3$ pont megoldása a számlálóból és a nevezőből alkotott egyenleteknek is (a számláló egyenlő 0-val és a nevező egyenlő 0-val):

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$2x^2 - 4x - 6 = 0$

ebből az következik, hogy kiemelhetünk belőlük az $(x - x_0)$ kifejezést, itt konkrétan $(x - 3)$-at

gyöktényezős alakra hozva: $a(x - x_1)(x - x_2)$

ezek után egyszerűsítjük törtünket, majd újra behelyettesítünk

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{2x^2-4x-6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+6)}{(x-3)(2x+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+6}{2x+2} = \frac{3+6}{2.3+2} = \frac{9}{8}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{8+3x-5x^2}{3x^2-2x-5} =$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{8+3x-5x^2}{3x^2-2x-5} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-(-1))(-5x+8)}{(x+1)(3x-5)} = \lim_{x\to -1}\frac{-5x+8}{3x-5} = \frac{-5.(-1)+8}{3.(-1)-5} = \frac{13}{-8} = -\frac{13}{8}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{4x^2-5x-26} =$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{4x^2-5x-26} = \lim_{x\to -2}\frac{(x-(-2))(x+2)}{(x+2)(4x-13)} = \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{4x-13} = \frac{-2+2}{4.(-2)-13} = \frac{0}{-21} = 0$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{15+7x-2x^2}{x^2-10x+25} =$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{15+7x-2x^2}{x^2-10x+25} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(-2x-3)}{(x-5)(x-5)} = \lim_{x\to 5}\frac{-2x-3}{x-5} = \frac{-2.5-3}{5-5} = \frac{-13}{0}$$ nincs határértéke

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{7x-3}-5}{3x-12} =$$

behelyettesítjük a pontot

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{7x-3}-5}{3x-12} = \frac{\sqrt{7.4-3}-5}{3.4-12} = \frac{\sqrt{25}-5}{12-12} = \frac{0}{0}$$

a számlálóból ki kellene emelnünk $(x - 4)$-et → ilyen alakból nem tudunk

a tört értéke nem változik, ha megszorozzuk (bővítjük) vagy elosztjuk (egyszerűsítjük) a számlálót és a nevezőt is ugyanazzal a nullától különböző kifejezéssel (számmal)

az első évfolyamban a törtek nevezőjének gyöktelenítésénél használtuk azt, amit most is fogunk, az elve ugyanaz – alapját az $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ képlet adja

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{7x-3}-5}{3x-12}\cdot\frac{\sqrt{7x-3}+5}{\sqrt{7x-3}+5} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{7x-3}^2-5^2}{(3x-12)(\sqrt{7x-3}+5)} = \lim_{x\to 4}\frac{7x-3-25}{3(x-4)(\sqrt{7x-3}+5)} = \lim_{x\to 4}\frac{7(x-4)}{3(x-4)(\sqrt{7x-3}+5)} =$$

és most már egyszerűsíthetünk az (x – 4) kifejezéssel, majd újra behelyettesítjük a pontot

$$= \lim_{x\to 4}\frac{7}{3(\sqrt{7x-3}+5)} = \frac{7}{3(\sqrt{7.4-3}+5)} = \frac{7}{3(\sqrt{25}+5)} = \frac{7}{30}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3x+6}-3} =$$

behelyettesítjük a pontot

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3x+6}-3} = \frac{\sqrt{1+3}-2}{\sqrt{3.1+6}-3} = \frac{\sqrt{4}-2}{\sqrt{9}-3} = \frac{0}{0}$$

az előző feladathoz hasonló módon bővítjük törtünket, csak mivel a számlálóban és a nevezőben is gyökmennyiség szerepel, a bővítést kétszer kell végrehajtanunk

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3x+6}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}^2-2^2}{(\sqrt{3x+6}-3)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(\sqrt{3x+6}-3)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{3x+6}-3)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{3x+6}-3)(\sqrt{x+3}+2)}\cdot\frac{\sqrt{3x+6}+3}{\sqrt{3x+6}+3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{3x+6}+3)}{\left(\sqrt{3x+6}^2-3^2\right)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{3x+6}+3)}{(3x+6-9)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{3x+6}+3)}{(3x-3)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{3x+6}+3)}{3(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

mos már egyszerűsíthető, utána pedig be lehet helyettesíteni

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+6}+3}{3(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{\sqrt{3.1+6}+3}{3(\sqrt{1+3}+2)} = \frac{\sqrt{9}+3}{3(\sqrt{4}+2)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{3x-5}-4}{x-7} =$$

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{3x-5}-4}{x-7} = \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{3x-5}-4}{x-7}\cdot\frac{\sqrt{3x-5}+4}{\sqrt{3x-5}+4} = \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{3x-5}^2-4^2}{(x-7)(\sqrt{3x-5}+4)} = \lim_{x\to 7}\frac{3x-5-16}{(x-7)(\sqrt{3x-5}+4)} = \lim_{x\to 7}\frac{3x-21}{(x-7)(\sqrt{3x-5}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 7}\frac{3(x-7)}{(x-7)(\sqrt{3x-5}+4)} = \lim_{x\to 7}\frac{3}{\sqrt{3x-5}+4} = \frac{3}{\sqrt{3.7-5}+4} = \frac{3}{\sqrt{16}+4} = \frac{3}{8}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x+6}{\sqrt{3-2x}-3} =$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x+6}{\sqrt{3-2x}-3} = \lim_{x\to -3}\frac{2x+6}{\sqrt{3-2x}-3}\cdot\frac{\sqrt{3-2x}+3}{\sqrt{3-2x}+3} = \lim_{x\to -3}\frac{2(x+3)(\sqrt{3-2x}+3)}{\sqrt{3-2x}^2-3^2} = \lim_{x\to -3}\frac{2(x+3)(\sqrt{3-2x}+3)}{3-2x-9} =$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{2(x+3)(\sqrt{3-2x}+3)}{-6-2x} = \lim_{x\to -3}\frac{2(x+3)(\sqrt{3-2x}+3)}{-2(3+x)} = \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{3-2x}+3}{-1} = \frac{\sqrt{3-2.(-3)}+3}{-1} = -\left(\sqrt{3+6}+3\right) = -6$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2-\sqrt{3x+1}} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2-\sqrt{3x+1}} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2-\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{2+\sqrt{3x+1}}{2+\sqrt{3x+1}} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(2+\sqrt{3x+1})}{2^2-\sqrt{3x+1}^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(2+\sqrt{3x+1})}{4-(3x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(2+\sqrt{3x+1})}{4-3x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(2+\sqrt{3x+1})}{3-3x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(2+\sqrt{3x+1})}{-3(-1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(2+\sqrt{3x+1})}{-3} = \frac{(1+1)(2+\sqrt{3.1+1})}{-3} = \frac{2(2+\sqrt{3+1})}{-3} = \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-4x^2}{5-\sqrt{33-2x}} =$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-4x^2}{5-\sqrt{33-2x}} = \lim_{x\to 4}\frac{x^3-4x^2}{5-\sqrt{33-2x}}\cdot\frac{5+\sqrt{33-2x}}{5+\sqrt{33-2x}} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2(x-4)(5+\sqrt{33-2x})}{5^2-\sqrt{33-2x}^2} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2(x-4)(5+\sqrt{33-2x})}{25-(33-2x)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x^2(x-4)(5+\sqrt{33-2x})}{25-33+2x} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2(x-4)(5+\sqrt{33-2x})}{-8+2x} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2(x-4)(5+\sqrt{33-2x})}{2(-4+x)} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2(5+\sqrt{33-2x})}{2} =$$

$$= \frac{4^2(5+\sqrt{33-2.4})}{2} = \frac{16(5+\sqrt{33-8})}{2} = \frac{16.10}{2} = 80$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{2x^2+5x-18} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{2x^2+5x-18} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{2x^2+5x-18}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}^2-3^2}{(x-2)(2x+9)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(2x+9)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(2x+9)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(2x+9)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2x+9} = \frac{2+2}{2.2+9} = \frac{4}{4+9} = \frac{4}{13}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^4+3-5x+7x^6}{6x^5-3x^6-4x^2+8x} =$$

megkeressük a törtkifejezésben a legnagyobb hatványt (x^6), és vele osszuk el a törtkifejezés minden tagját

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^4+3-5x+7x^6}{6x^5-3x^6-4x^2+8x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^6}-\frac{2x^4}{x^6}+\frac{3}{x^6}-\frac{5x}{x^6}+\frac{7x^6}{x^6}}{\frac{6x^5}{x^6}-\frac{3x^6}{x^6}-\frac{4x^2}{x^6}+\frac{8x}{x^6}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^6}-\frac{5}{x^5}+7}{\frac{6}{x}-3-\frac{4}{x^4}+\frac{8}{x^5}} =$$

minden törtnek, amelyik az x pozitív hatványát tartalmazza a nevezőjében, a határértéke nulla (a tételből következik)

ezért ezen nullák szorzata és összege is nulla határértékkel bír

egyedül az x mentes számok határértéke más → maga a szám

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4.0.0.0-2.0.0+3.0.0.0.0.0.0-5.0.0.0.0.0+7}{6.0-3-4.0.0.0.0+8.0.0.0.0.0} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$