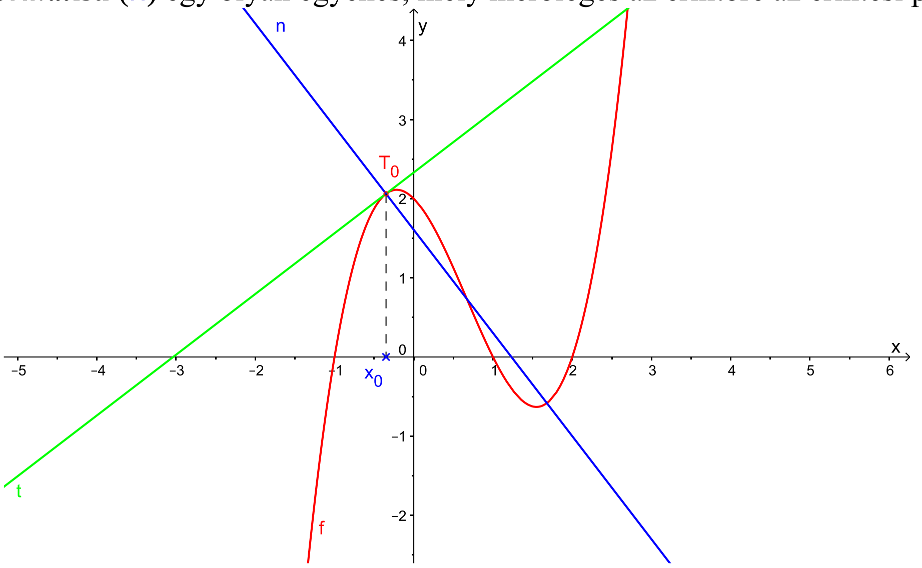
A derivált geometriai jelentősége – az érintő és a normális
(Geometrický význam derivácie - dotyčnica a normála)

D. Az f függvény ***érintője*** (t) egy olyan egyenes, melynek egy (a, b) nyílt intervallumon csak egy közös pontja van a függvénnyel, és ezen intervallumon a függvény grafikonja az érintő által határolt félsíkokból csak az egyikben van.
D. Az f függvény ***normálisa*** (n) egy olyan egyenes, mely merőleges az érintőre az érintési pontban.



A derivált értéke az x_0 pontban a ponthoz tartozó érintő iránytényezőjét adja.

$$f'(x_0) = k_t$$

Ezért, ha szeretnénk felírni az érintő egyenletét valamely T_0 pontban, akkor iránytényezős egyenletet használunk. Többnyire nem ismerjük az érintési pontot, csak annak x koordinátáját (x_0). Ezért behelyettesítjük a függvénybe, és kiszámoljuk a hiányzó y koordinátáját (y_0).
Utána deriváljuk a függvényt. A derivált függvénybe behelyettesítjük az érintési pont x koordinátáját, és így megkapjuk az érintő iránytényezőjét (k_t). Felírjuk az érintő iránytényezős egyenletének előzetes alakját. A hiányzó konstans (b) értékét az érintési pont behelyettesítésével számoljuk ki, mivel ez a pont illeszkedik az érintőhöz.

A normális merőleges az érintőre. Ezért a normális iránytényezőjét az alábbi módon számolhatjuk:

$$k_n = -\frac{1}{k_t}$$

Ezek után az érintőnél ismertetett módon járunk el.

példa:

Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 3x - 2$ egyenletű görbe $T_0(2; y_0)$ pontbeli érintőjének és normálisának egyenletét.

először meghatározzuk a hiányzó koordinátát

$f(x_0) = f(2) = 2^2 + 3.2 - 2 = 4 + 6 - 2 = 8$

$T_0(2; 8)$

lederiváljuk a függvényt

$f'(x) = (x^2 + 3x - 2)' = 2x + 3$

a derivált értéke egyenlő az érintő iránytényezőjével

$k_t = f'(x_0) = f'(2) = 2.2 + 3 = 4 + 3 = 7$

felírhatjuk az érintő iránytényezős egyenletét

t: $y = k_t.x + b$

$y = 7x + b$

behelyettesítjük az érintési pontot, hogy kiszámoljuk a hiányzó b számot

$8 = 7.2 + b$

$8 = 14 + b \qquad /-14$

$-6 = b$

vagyis az érintő iránytényezős egyenletének végleges alakja

$t: y = 7.x - 6$

M. Ha az egyenesnek más típusú egyenletére volna szükség (általános, paraméteres, …), második évfolyamban tanultuk az egyes típusok közötti átmenetet.

kiszámoljuk a normális iránytényezőjét

$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{7}$

folytatjuk az iránytényezős egyenlettel

$n: y = k_n.x + b$

$y = -\frac{1}{7}x + b$

újra behelyettesítjük az érintési pontot, hogy kiszámoljuk a hiányzó b számot

$8 = -\frac{1}{7}.2 + b$

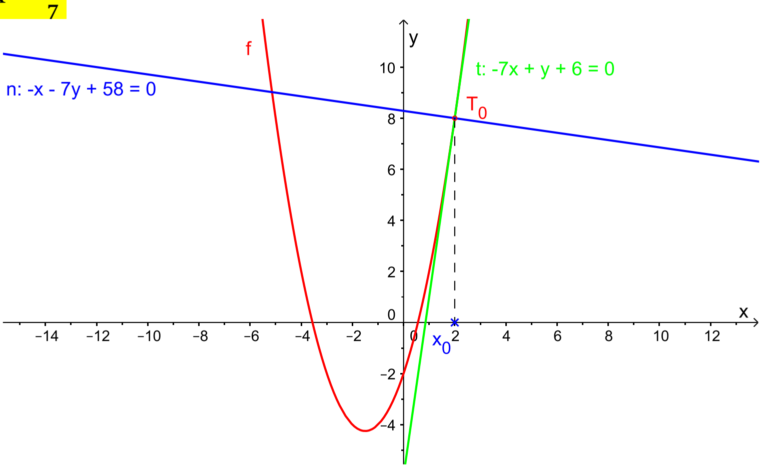
$8 = -\frac{2}{7} + b \qquad /+\frac{2}{7}$

$8 + \frac{2}{7} = b$

$\frac{58}{7} = b$

vagyis a normális iránytényezős egyenletének végleges alakja

$n: y = -\frac{1}{7}.x + \frac{58}{7}$



Írjuk fel a $g(x) = \frac{x^3}{20} + \frac{3x^2}{20} - \frac{9x}{5} + \frac{8}{5}$ egyenletű görbe $T_0(-4; y_0)$ pontbeli érintőjének és normálisának egyenletét.

kiszámoljuk az y_0-t

$g(x_0) = g(-4) = \frac{(-4)^3}{20} + \frac{3.(-4)^2}{20} - \frac{9.(-4)}{5} + \frac{8}{5} = \frac{-64}{20} + \frac{3.16}{20} - \frac{-36}{5} + \frac{8}{5} = \frac{-16}{5} + \frac{12}{5} + \frac{36}{5} + \frac{8}{5} = \frac{40}{5} = 8$

$T_0(-4; 8)$

lederiváljuk a függvényt

$g'(x) = \left(\frac{x^3}{20} + \frac{3x^2}{20} - \frac{9x}{5} + \frac{8}{5}\right)' = \frac{3x^2}{20} + \frac{6x}{20} - \frac{9}{5}$

meghatározzuk az érintő iránytényezőjét

$k_t = g'(x_0) = g'(-4) = \frac{3.(-4)^2}{20} + \frac{6.(-4)}{20} - \frac{9}{5} = \frac{3.16}{20} + \frac{-24}{20} - \frac{9}{5} = \frac{12}{5} - \frac{6}{5} - \frac{9}{5} = -\frac{3}{5}$

az érintő iránytényezős egyenlete

$t: y = k_t.x + b$

$y = -\frac{3}{5}x + b$

behelyettesítjük az érintési pontot

$8 = -\frac{3}{5}(-4) + b$

$8 = \frac{12}{5} + b \qquad /-\frac{12}{5}$

$8 - \frac{12}{5} = b$

$\frac{28}{5} = b$

az érintő egyenlete

$t\colon y = -\frac{3}{5}x + \frac{28}{5}$

a normális iránytényezője

$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

a normális iránytényezős egyenlete

$n\colon y = k_n.x + b$

$y = \frac{5}{3}x + b$

behelyettesítjük az érintési pontot

$8 = \frac{5}{3}(-4) + b$

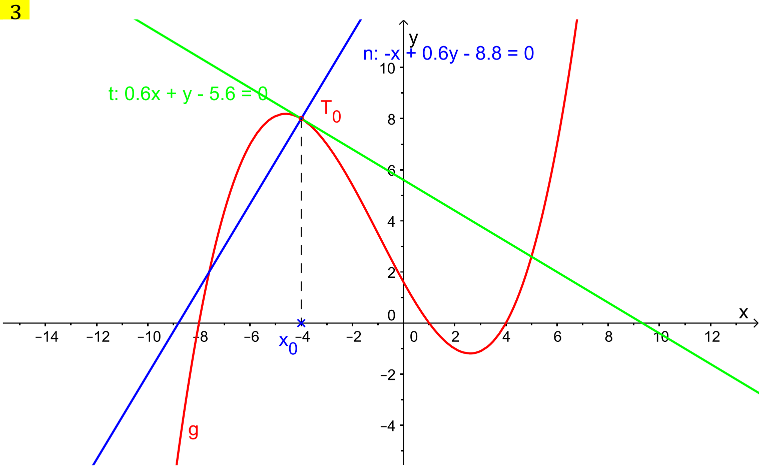
$8 = -\frac{20}{3} + b \qquad /+\frac{20}{3}$

$8 + \frac{20}{3} = b$

$\frac{44}{3} = b$

a normális egyenlete

$n\colon y = \frac{5}{3}x + \frac{44}{3}$



Írjuk fel a $h(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ egyenletű görbe azon érintőinek egyenletét, melyek párhuzamosak az r: $2x - y + 1 = 0$ egyenletű egyenessel.

az egyenes általános egyenletéből meghatározzuk az r egyenes normálvektorát

$\overrightarrow{n_r} = (2; -1)$

ha az érintő párhuzamos kell, hogy legyen egy adott egyenessel, akkor az ő normálvektoraik is párhuzamosak

$\overrightarrow{n_r} \parallel \overrightarrow{n_t}$

ezért a keresett érintők normálvektora lehet $\overrightarrow{n_r}$ is

$\overrightarrow{n_r} = \overrightarrow{n_t} = (2; -1)$

ebből felírhatjuk az érintő irányvektorát (merőleges a normálvektorra), és utána pedig az iránytényezőt

$\overrightarrow{n_t} \perp \overrightarrow{s_t} \Rightarrow \overrightarrow{s_t} = (1; 2)$

$k_t = \frac{s_2}{s_1} = \frac{2}{1} = 2$

térjünk vissza a görbéhez – ha szeretnénk felírni az érintőjének az egyenletét, ennek iránytényezőjét a deriváltjának az érintőpontbeli értékeként kapnánk meg ⇒ deriváljuk le a függvényt

$h'(x) = (x^3 - 5x^2 + 5x + 3)' = 3x^2 - 10x + 5$

egyenletet oldunk meg: a derivált függvény hol veszi fel a k_t értéket

$$3x^2 - 10x + 5 = 2$$

ez egy másodfokú egyenlet → redukáljuk, és behelyettesítjük a megoldóképletbe

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2-4.3.3}}{2.3} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow \frac{1}{3} \end{matrix}$$

megkaptuk az érintési pontok x koordinátáit → kiszámoljuk a hiányzó y koordinátákat (behelyettesítünk az eredeti, nem derivált függvénybe)

$$h(x_1) = h(3) = 3^3 - 5.3^2 + 5.3 + 3 = 27 - 5.9 + 15 + 3 = 0$$

$$h(x_2) = h\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5.\frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{27} - 5.\frac{1}{9} + \frac{5}{3} + 3 = \frac{112}{27}$$

$T_1(3; 0)$; $T_2\left(\frac{1}{3}; \frac{112}{27}\right)$

felírjuk az érintő iránytényezős egyenletének előzetes alakját → a hiányzó konstans kiszámításához behelyettesítjük az érintési pontokat ⇒ két különböző egyenlet → két ilyen érintőt találtunk

$$t: y = 2x + b$$

$T_1 \in t$

$$0 = 2.3 + b_1$$

$$0 = 6 + b_1 \qquad /-6$$

$$-6 = b_1$$

$T_2 \in t$

$$\frac{112}{27} = 2.\frac{1}{3} + b_2$$

$$\frac{112}{27} = \frac{2}{3} + b_2 \qquad /-\frac{2}{3}$$

$$\frac{112}{27} - \frac{2}{3} = b_2$$

$$\frac{94}{27} = b_2$$

vagyis a párhuzamos érintők egyenletei:

$t_1: y = 2x - 6$ $\qquad$ $t_2: y = 2x + \frac{94}{27}$